

Метод итерации решения СЛАУ

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) — это методы последовательных приближений, которые позволяют найти решение путём построения последовательности векторов, сходящейся к точному решению. Они особенно полезны для систем большого порядка (например, $n > 100$) или плохо обусловленных систем.

Основные принципы итерационных методов

- **Начальное приближение.** Задаётся начальное приближённое значение решения.
- **Итерационный процесс.** На каждом шаге выполняется цикл вычислений (итерация), в результате которого получается новое приближение.
- **Условие остановки.** Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность. Обычно это проверяется по малости разности между последовательными приближениями или по другим критериям.

Некоторые итерационные методы

- **Метод простой итерации (метод Якоби).** Система уравнений преобразуется к виду, разрешённому относительно x , после чего вычисляются последовательные приближения по рекуррентной формуле. Условие сходимости метода — все собственные значения матрицы $B = A - \tau E$ (где τ — некоторый параметр) по модулю должны быть меньше единицы. Достаточное условие сходимости — диагональное преобладание в матрице A (каждый диагональный элемент должен быть больше суммы модулей недиагональных элементов соответствующей строки или столбца).

- Метод Зейделя. Модификация метода простой итерации, при которой при вычислении очередного приближения $x_i^{(k)}$ используются уже вычисленные ранее приближения $x_1^{(k)}$, ..., $x_{i-1}^{(k)}$. Для нормальных систем (когда матрица A симметрична и положительно определена) метод Зейделя всегда сходится.

- Метод релаксации. Использует параметр релаксации ω , который позволяет ускорить сходимость.

- Метод сопряжённых градиентов, метод бисопряжённых градиентов и другие.

Особенности итерационных методов

- Не требуют хранения всей матрицы A . Обычно достаточно уметь вычислять произведение A на заданный вектор.

- Погрешности не накапливаются — вычисления в каждой итерации определяются результатами предыдущей и практически не зависят от ранее выполненных.

- Эффективное применение зависит от удачного выбора начального приближения и быстроты сходимости процесса.

- Большинство итерационных методов являются самоисправляющимися, то есть допущенная погрешность в вычислениях при сходимости исправляется в ходе итерирования и не отражается или отражается незначительно на окончательном результате.

Когда применяются итерационные методы

- Для систем большого порядка, когда прямые методы становятся труднореализуемыми из-за ограничений в доступной оперативной памяти или необходимости выполнения чрезмерно большого числа арифметических операций.

- Для плохо обусловленных систем.

При реализации итерационных методов важно учитывать условия сходимости и правильно выбирать параметры алгоритма для достижения требуемой точности за минимальное количество итераций.